（20）（本题满分 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

【解析】：（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ a & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$，可知 $a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为 $\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，故其通解为 $k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，有 $|A|=0$.

即： $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得 $\lambda=1$ 或-1.

当 $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$，显然不符，故 $\lambda=-1$.

（21）（本题满分 10 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{pmatrix}$，$A^T$ 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^TA)=2$，且二次型 $f=x^TA^TAx$。

（1）求 a

（2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

【解析】：（1）由 $r(A^TA)=r(A)=2$ 可得，

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

（2） $f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得 B 矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=0$，解 $(\lambda_1E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于$\lambda_2=2$,解$(\lambda_2E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于$\lambda_3=6$,解$(\lambda_3E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将η_1,η_2,η_3单位化可得：

$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$